PROBLEMAS DE AEROELASTICIDAD

Ejercicio 16

Dentro de la validez de la teoría aerodinámica bidimensional, incompresible, no estacionaria se desea estudiar la respuesta de un puente frente a ráfagas. Para ello se considera una sección característica de anchura $2b$ y masa por unidad de envergadura M en presencia de un viento con velocidad horizontal U_∞. Repentinamente, y durante un tiempo t_1, aparece una velocidad vertical uniforme $w_0 << U_\infty$. Teniendo en cuenta que tanto el espesor como el desplazamiento vertical de la sección característica son pequeños frente a su anchura, calcular la evolución temporal de la velocidad vertical de la sección, considerando que no gira y que la rigidez a flexión en la sección analizada es $M\omega_h^2$.

Dibujar el resultado anterior cuando la masa vale $M = 4384$ kg·m^{-1}, la anchura del puente es 4 m, la rigidez a flexión es nula y la duración de la ráfaga es infinita.

Calcular la respuesta en el plano de Laplace.

Las expresiones par las funciones de Küssner y de Wagner son:

$$\psi(s) = 1 - \frac{1}{2}e^{-0.130s} - \frac{1}{2}e^{-s}$$
$$\phi(s) = 1 - 0.165e^{-0.0455s} - 0.335e^{-0.300s}$$

siendo $s = \frac{U_\infty t}{b}$

Problema #16

Ecuación del movimiento

$$M\ddot{\xi} + M\omega_h^2 \xi = L_M + L_G$$

$\xi \equiv$ definido positivo hacia arriba

Cambiando a tiempo adimensional $s = \frac{U_\infty t}{b}$ y tomando la transformada de Laplace

$$M\frac{U_\infty^2}{b^2} p^2 \bar{\xi}(p) + M\omega_h^2 \bar{\xi}(p) = -\pi\rho_\infty U_\infty^2 \left[p^2 \bar{\xi}(p) + 2p^2 \bar{\xi}(p)\bar{\phi}\right]$$

$$+ 2\pi\rho_\infty U_\infty^2 b \frac{\bar{W}_G(p)}{U_\infty} p\bar{\psi}(p)$$

Pasando los términos en $\bar{\xi}(p)$ al otro lado de la ecuación obtenemos

$$\bar{\xi}(p)\left[\frac{MU_\infty^2}{b^2}p^2 + M\omega_h^2 + \pi\rho_\infty U_\infty^2\left(p^2 + 2p^2\bar{\phi}(p)\right)\right] =$$

$$= 2\pi\rho_\infty U_\infty b \bar{W}_G(p)\, p.\bar{\psi}(p)$$

o bien que

$$\bar{\xi}(p) = \frac{2\pi\rho_\infty U_\infty b \bar{W}_G(p)\, p\bar{\psi}(p)}{p^2\left\{\frac{MU_\infty^2}{b^2} + \pi\rho_\infty U_\infty^2(1 + 2\bar{\phi}(p))\right\} + M\omega_h^2}$$

Tomando como parámetro $\lambda = \frac{M}{4\pi\rho_\infty b^2}$ se obtiene

$$\boxed{\bar{\xi}(p) = \frac{b/2U_\infty \, \bar{W}_G(p)\, \phi\, \bar{\psi}(p)}{\left\{\lambda + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\bar{\phi}(p)\right\}p^2 + \frac{\omega_h^2 b^2}{U_\infty^2}\lambda}}$$

llamando $\boxed{k_h = \frac{\omega_h b}{U_\infty}}$

Ahora hay que calcular $\bar{W}_G(p)$.

Si $\xi_1 \to \infty$ $\quad \bar{W}_G(p) = \frac{W_0}{p}$

Si ξ_1 es finito

$$\bar{W}_G(p) = \int_0^{\xi_1} e^{-p\xi} W_0 dt = \frac{W_0}{p}\left(1 - e^{-p\xi_1}\right)$$

Entonces la respuesta en el dominio de Laplace vale

$$\boxed{\bar{\xi}(p) = \frac{\frac{b}{2U_\infty} W_0 \left(1 - e^{-p\xi_1}\right)\bar{\psi}(p)}{\left\{\lambda + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\bar{\phi}(p)\right\}p^2 + \lambda k_h^2}}$$